8 Tests paramétriques

On revient dans le cadre d'un modèle paramétrique $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ où $\Theta \subset \mathbb{R}$ et X l'observation. On suppose que le modèle est identifiable.

8.1 Rappels sur les tests

<u>Rappel</u> Pour tester $H_0 : \theta \in \Theta_0$ il suffit de trouver un intervalle de confiance $I(X)$ au niveau $1-\alpha$ et d'accepter H_0 si $\Theta_0 \cap I(X) \neq \emptyset$ - le test obtenu est alors automatiquement de niveau α. La plupart des tests ont des hypothèses de la forme

a) $\underbrace{\Theta_0 = \{\theta \leq \theta_0\} \quad b)\ \Theta_0 = \{\theta \geq \theta_0\}}_{\text{hypothèses unilatères}}$ c) $\underbrace{\Theta_0 = \{\theta \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]\}}_{\text{bilatère}}$

$(\Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$, $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0\}$ $\Theta_1 = \{\theta < \theta_0 - \delta\} \cup \{\theta > \theta_0 + \delta\})$

et dans ces cas on utilise des régions de rejet de la forme

a) $\theta \in (-\infty, \hat{\theta}_L(X)]$ où $[\hat{\theta}_L, +\infty)$ IC au niveau $1-\alpha$

b) $\theta \in [\hat{\theta}_R(X), +\infty)$ où $(-\infty, \hat{\theta}_R(X)]$ ——

c) $\theta \in (-\infty, \hat{\theta}_L(X)] \cup [\hat{\theta}_R(X), +\infty)$ où $[\hat{\theta}_L(X), \hat{\theta}_R(X)]$ ——

<u>Ex</u> $X = (X_1, \dots, X_n)$ iid $\mathcal{N}(\theta, 1)$ $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathbb{P}_\theta$

donc trois intervalles de confiances pour ces trois types de tests avec

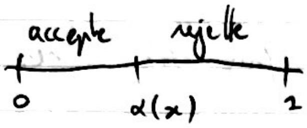
a) $\hat{\theta}_L(X) = \bar{X}_n - \dfrac{\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{n}}$ b) $\hat{\theta}_R(X) = \bar{X}_n + \dfrac{\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{n}}$

c) $\hat{\theta}_L(X) = \bar{X}_n - \dfrac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}$ $\hat{\theta}_R(X) = \bar{X}_n + \dfrac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}$

__Rappel__ Si on a une famille de tests φ_α niveau α avec région de rejet $\{T(X) > c_\alpha\}$ (ou $T(X) < c_\alpha$) et que l'on observe $X(\omega) = x$ alors la p-valeur est donnée par

$$\alpha(x) = \inf\{\alpha : T(x) > c_\alpha\}.$$

Si $\alpha \mapsto c_\alpha$ continue strictement décroissante on trouve $c_{\alpha(x)} = T(x)$

et 

8.2 Test à deux hypothèses simples

__Def__ Si $H_i : \theta \in \Theta_i$ avec $\Theta_i = \{\theta_i\}$ on dit que H_i est une __hypothèse simple__

Cadre très simple et inutile en pratique, mais problème qu'on peut résoudre mathématiquement: maximiser la puissance $\mathbb{E}_{\theta_1}(\varphi(X))$ par tous les test φ qui vérifient $\mathbb{E}_{\theta_0}\varphi(X) \le \alpha$.

__Problème__ $X \sim \mathcal{B}(\theta)$ $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ $\mathcal{X} = \{0,1\}$ (Bernoulli)

une fonction test pour ce problème est $\varphi : \{0,1\} \to \{0,1\}$. Il y a quatre possibilités: $\phi_1(x) = 0$ (on accepte tout le temps H_0 sans regarder X)

$\phi_2(x) = 1$ (– rejette ————————)

$\phi_3(x) = x$ et $\phi_4(x) = 1 - x$.

La fonction puissance $\beta_j(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\phi_j(X)]$ de chaque test ϕ_j pour $j = 1, 2, 3, 4$ vérifie:

$\beta_1(\theta) = 0 \quad \forall\theta \Rightarrow$ (niveau, puissance) $= (0, 0)$

$\beta_2(\theta) = 1 \quad \forall\theta \Rightarrow$ ——— $= (1, 1)$

$\beta_3(\theta) = \theta \Rightarrow$ $= (\theta_0, \theta_1)$

$\beta_4(\theta) = 1 - \theta \Rightarrow$ $= (\theta_1, \theta_0)$

Par ex si $\theta_0 = \frac{1}{4}$ et $\theta_1 = 3/4$ et qu'on veut tester au niveau $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ on ne peut choisir que $\phi_0 \Rightarrow$ qui est très mauvais !

Pour résoudre ce problème on doit considérer des tests "randomisés", ce qui permet de construire un test de tout niveau $\alpha \in (0, 1)$.

§.3. Test randomisés

Pour comprendre cette idée un peu tordue, commençons par regarder à nouveau l'exemple précédent : on ne peut pas trouver une fonction de test $\varphi : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ telle que $\mathbb{E}_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha$ autre que $\varphi(X) = 0$ de sorte que $\mathbb{E}_\theta \varphi(X) = 0 \leq \alpha$

La seule chose à faire est de considérer une fonction de test qui prend des valeurs dans $[0, 1]$: $\delta : \{0, 1\} \to [0, 1]$ c'est à dire

$$\delta(x) = \begin{cases} \gamma & \text{si } x = 1 \\ 1 - \gamma & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec $\gamma \in (0, 1)$ à choisir de sorte que $\mathbb{E}_{\theta_0} \delta(X) = \alpha$ ce que l'on peut faire :

$$\mathbb{E}_{\theta_0} \delta(X) = \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\gamma \mathbb{1}_{X=1} + (1-\gamma) \mathbb{1}_{X=0}\right] = \gamma \theta_0 + (1-\gamma)(1-\theta_0) = \alpha$$

pour $\gamma = \frac{\alpha - 1 + \theta_0}{2\theta_0 - 1}$. Mais le problème est que l'on aimerait choisir entre H_0 et H_1 et pas juste renvoyer $\delta(X)$ au vu de X. On doit donc se ramener à une décision binaire $\overline{\varphi} \in \{0, 1\}$.

Pour y arriver, pas d'autre choix que de randomiser le test :
on calcule $\delta(X)$ et on choisit au hasard H_0 ou H_1 conditionnellement à $\delta(X)$ ie on tire $\bar{\varphi}$ de loi $\mathcal{B}(1, \delta(X))$ conditionnement à $\delta(X)$.

On a alors bien $\bar{\varphi} \in \{0,1\}$ et on a

$$\mathbb{P}_{\theta_0}[\bar{\varphi} = 1] = \mathbb{E}_{\theta_0}[\mathbb{1}_{\bar{\varphi}=1}] = \mathbb{E}_{\theta_0}\left[\mathbb{E}_{\theta_0}[\mathbb{1}_{\bar{\varphi}=1} \mid \delta(X)]\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\theta_0}[\delta(X)] = \alpha \quad \text{car} \quad \mathbb{1}_{\bar{\varphi}=1} \mid \delta(X) \sim \mathcal{B}(1, \delta(X))$$

et car δ est construit de sorte que $\mathbb{E}_{\theta_0}(\delta(X)) = \alpha$.

Reformulons tout cela proprement : si on a un test $\varphi : \mathcal{X} \to \{0,1\}$ on a en posant $R(\theta_i, \varphi) = \mathbb{P}_{\theta_i}[\varphi(X) = 1 - i]$ que

$R(\theta_0, \varphi) =$ risque de première espèce de φ

$R(\theta_1, \varphi) =$ —— deuxième ——

(on est toujours dans le cas $H_0 : \theta = \theta_0$
$H_1 : \theta = \theta_1$)

et on peut réécrire cette "erreur" sous la forme (pour $i \in \{0,1\}$)

$$R(\theta_i, \varphi) = \mathbb{E}_{\theta_i} |\varphi(X) - i|$$

On a vu qu'on allait remplacer $\varphi : \mathcal{X} \to \{0,1\}$ par une fonction $\delta(X) : \mathcal{X} \to [0,1]$ et une prise de décision aléatoire tq $\bar{\varphi} \mid \delta(X) \sim \mathcal{B}(1, \delta(X))$ ie $\mathbb{P}(\bar{\varphi} = 1 \mid \delta(X)) = \delta(X)$
ie on choisit au hasard d'accepter H_0 avec proba $\delta(X)$.

$\delta(X)$ correspond alors à une "plausibilité" de H_1. On garde la même fonction de risque pour δ, ie $R(\theta_i, \delta) = \mathbb{E}_{\theta_i} |\delta(X) - i|$ et alors les risques de première espèce et de deuxième espèce pour $\bar{\varphi}$ sont

$$\mathbb{P}_{\theta_i}[\bar{\varphi} = 1 - i] = \mathbb{E}_{\theta_i}[\mathbb{1}_{\bar{\varphi}=1-i}] = \mathbb{E}_{\theta_i}\left[\mathbb{E}_{\theta_i}[\mathbb{1}_{\bar{\varphi}=1-i} \mid \delta(X)]\right]$$

$= \mathbb{E}_{\theta_i} |\delta(X) - i| = R(\theta_i, \delta)$ donc la fonction de décision randomisée $\overline{\varphi}$ a des erreurs qui correspondent bien aux fonctions de risque de δ. On appelle le test $\overline{\varphi}$ un test randomisé

8.4 Point de vue Bayesien.

$X \sim P_\theta \qquad P_\theta = f_\theta \cdot \nu$

La fonction de décision $\delta : \{0, 1\} \to [0, 1] = A$ a pour fonction risque $R(\theta_i, \delta) = \mathbb{E}_{\theta_i} |\delta(X) - i|$. On peut alors prendre un point de vue bayésien : on considère une loi à priori sur $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ $g \cdot \mu$ où μ = mesure de comptage et $g(\theta_0) = \gamma \qquad g(\theta_1) = 1 - \gamma$ pour $\gamma \in (0, 1)$ (on évite les cas dégénérés). La densité jointe de (X, θ) par rapport à $\nu \otimes \mu$ est alors $h(x, \theta_0) = \gamma f_{\theta_0}(x)$ et $h(x, \theta_1) = (1 - \gamma) f_{\theta_1}(x)$ et la loi a posteriori est donnée par

$$h(\theta_0 | x) = \frac{\gamma f_{\theta_0}(x)}{\gamma f_{\theta_0}(x) + (1-\gamma) f_{\theta_1}(x)}, \quad h(\theta_1 | x) = \frac{(1-\gamma) f_{\theta_1}(x)}{\gamma f_{\theta_0}(x) + (1-\gamma) f_{\theta_1}(x)}$$

On avait vu que minimiser le risque de Bayes revient à minimiser l'espérance de la perte pour la loi a posteriori, donc ici il faut minimiser

$$h(\theta_0 | x) |\delta(x) - 0| + h(\theta_1 | x) |\delta(x) - 1|$$

$$= \delta(x) \big(h(\theta_0 | x) - h(\theta_1 | x) \big) + h(\theta_1 | x)$$

ce qui se minimise trivialement :

$$\delta^B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } h(\theta_0 | x) > h(\theta_1 | x) \\ 1 & \text{si } h(\theta_0 | x) < h(\theta_1 | x) \\ ? & \text{si } h(\theta_0 | x) = h(\theta_1 | x) \end{cases}$$

ie $\delta^B(x) = 0$ si $\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)} > \frac{1-\gamma}{\gamma}$ et $\delta^B(x) = 1$ si $\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)} < \frac{1-\gamma}{\gamma}$.

On a donc montré la proposition suivante:

Prop Pour le problème de test $H_0 : \theta = \theta_0 \mid H_1 : \theta = \theta_1$ avec $X \sim P_\theta$ et $P_\theta = f_\theta \cdot \nu$ et la fonction de perte $R(\theta_i, \delta) = \mathbb{E}_{\theta_i} |\delta(X) - i|$ pour $i \in \{0,1\}$ et une loi a priori $g \cdot \mu$ tq $g(\theta_0) = \gamma$ la procédure de décision de Bayes $\delta^B(x)$ qui minimise le risque de Bayes dans ce cadre vérifie

$$\delta^B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)} > \frac{1-\gamma}{\gamma} \\ 1 & \text{si } \frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)} < \frac{1-\gamma}{\gamma} \end{cases}$$

Remarque On a $f_{\theta_0} + f_{\theta_1} > 0$ ν-ps donc ps on a pas le cas indeterminé $\frac{0}{0}$ ... Si $P_\theta[\gamma f_0(X) = (1-\gamma) f_1(X)] = 0$ alors δ^B est P_θ-ps unique.

Remarque On peut écrire $\delta^B(x) = 0$ si $\log\left(\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)}\right) > c$ et $\delta^B(x) = 1$ si $\log\left(\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)}\right) < c$ avec $c = \frac{1-\gamma}{\gamma}$.

On peut avoir $c \in [-\infty, +\infty]$ et on utilise les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$ $\log 0 = -\infty$

Déf Un tel test s'appelle un test de rapport de vraisemblance entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.

8.5 La théorie de Neyman-Pearson

Neyman-Pearson: dissymétrisation du problème de test, on fixe l'erreur de première espèce à un niveau α : $\mathbb{E}_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha$ et on veut maximiser l'erreur de seconde espèce $\mathbb{E}_{\theta_1} \varphi(X)$.

Lemme de Neyman Pearson

Soit $\phi(X)$ un test de rapport de vraisemblance avec si $c=0$ $\phi(X)=1$ lorsque $f_{\theta_0}(X)=0$ et si $c=+\infty$, $\phi(X)=0$ lorsque $f_{\theta_1}(X)=0$.
Alors, toute autre procédure de test ϕ' telle que $\mathbb{E}_{\theta_0}\phi'(X) \leq \mathbb{E}_{\theta_0}\phi(X)$ vérifie $\mathbb{E}_{\theta_1}\phi'(X) \leq \mathbb{E}_{\theta_1}\phi(X)$ et si $\mathbb{E}_{\theta_1}\phi'(X) = \mathbb{E}_{\theta_1}\phi(X)$ alors $\phi'(x)=\phi(x)$ pour tout $x \notin \{x : \log(f_0(x)/f_1(x)) = c\}$.

Cela montre qu'il n'y a pas de test plus puissant qu'un test de rapport de vraisemblance pour des hypothèses simples !

déma. Supposons $0<c<+\infty$. $\phi(X)$ est un test de Bayes pour la valeur $\gamma = \frac{1}{1+c} \in (0,1)$. Si son erreur de première espèce est α et sa puissance est β alors son risque de Bayes est $\gamma\alpha + (1-\gamma)(1-\beta)$ d'après ce que l'on a vu avant. Si ϕ' a une erreur de première espèce $\alpha' \leq \alpha$ et une puissance $\beta' \geq \beta$ alors son risque de Bayes est

$$\gamma\alpha' + (1-\gamma)(1-\beta') \leq \gamma\alpha + (1-\gamma)(1-\beta)$$

ce qui n'est pas possible, sauf si ϕ' coïncide avec ϕ en dehors de $\left\{x : \log\left(\frac{f_0(x)}{f_1(x)}\right)=c\right\}$ d'après la proposition précédente. Comme $\gamma \in (0,1)$ on a nécessairement $\alpha=\alpha'$ et $\beta=\beta'$ sinon ϕ' aurait un meilleur risque de Bayes que ϕ.
Si $c=0$ alors $\phi(x)=0$ si $f_{\theta_0}(x)>0$ donc $\alpha=0$, donc $\alpha'=0$ et ϕ' est également un rapport de vraisemblance. En posant $\phi(x)=1$ si $f_0(x)=0$ on a $\beta=1$ qui est maximal. Même argument pour le cas $c=+\infty$. $\square$

Une conséquence de ce lemme est que $\alpha \leq \beta$ car si on choisit

$$\phi'(x) = \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)] = \alpha \quad \text{on a} \quad \mathbb{E}_{\theta_1} \phi'(X) \leq \underbrace{\mathbb{E}_{\theta_1} \phi(X)}_{\beta}$$

ie le niveau d'un test de rapport de vraisemblance est toujours plus petit que sa puissance.

Une conséquence plus remarquable est que les tests les plus puissants pour θ_0 contre θ_1 vérifient forcément :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \log\left(\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)}\right) > c \\ 1 & \text{si } \log\left(\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)}\right) < c \end{cases}$$

avec ϕ arbitraire dans $[0,1]$ sur l'ensemble $\left\{x : \log\left(\frac{f_{\theta_0}(x)}{f_{\theta_1}(x)}\right) = c\right\}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Evidemment, on choisit alors la valeur de } \phi \text{ et de } c \text{ de telle sorte que} \\ \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)] = \alpha \quad \text{où } \alpha \text{ est le niveau requis.}\end{array}}$$

<u>Intuition</u> : On rejette si $\log\left(\frac{f_{\theta_0}(X)}{f_{\theta_1}(X)}\right) > c$, c'est à dire lorsque θ_1 <u>est plus vraisemblable</u> que θ_0, et on règle ϕ et c pour vérifier la condition $\mathbb{E}_\theta(\phi(X)) = \alpha$. On a, pour des hypothèses simples, la garantie qu'on ne peut pas trouver de meilleur test grâce au lemme de Neyman-Pearson.

<u>Rem</u> : Si $X_1, \dots, X_n$ iid test de la forme $\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{f_{\theta_0}(X_i)}{f_{\theta_1}(X_i)}\right) < c$

8.6 Rapports de vraisemblance monotones et tests uniformément plus puissants

Très souvent le rapport de vraisemblance a une forme particulière :

$$\frac{f_{\theta_0}(X)}{f_{\theta_1}(X)} = \psi(T(X))$$

où ψ est une fonction continue et strictement monotone. Le test prend alors la forme $\phi(X) = 1$ lorsque $T(X) < c'$ si ψ est croissante strictement (et $T(X) > c'$ si ψ strictement décroissante) et où à nouveau on ajuste $\phi(X) \in [0,1]$ sur l'ensemble $\{T(X) = c'\}$ pour avoir un test du niveau requis.

Si $\mathbb{P}_\theta[T(X) = c'] = 0$ alors on choisit $\phi(X)$ arbitrairement sur $\{T(X) = c'\}$

<u>Rem</u> Si ψ n'est ni continue ni strictement croissante, mais juste croissante, on a toujours $\{T(X) > c'\} \supset \{\psi(T(X)) > c\}$ et $\{T(X) < c'\} \supset \{\psi(T(X)) < c\}$ de sorte que le test est toujours un test de rapport de vraisemblance dont on peut ajuster le niveau en réglant c' et en choisissant ϕ convenablement sur $\{T(X) = c'\}$

<u>En pratique :</u> on calcule $\mathbb{P}_{\theta_0}(T(X) < x)$ en fonction de x. Si $\exists c'$ tq $\mathbb{P}_{\theta_0}[T(X) < c'] = \alpha$ alors on utilise $\phi(X) = 1_{T(X) < c'}$, ou bien il existe c' tq $\mathbb{P}_{\theta_0}[T(X) < c'] \leq \alpha \leq \mathbb{P}_{\theta_0}[T(X) \leq c']$ et il faut alors ajuster ϕ sur $\{T(X) = c'\}$ pour avoir un niveau exactement α.

On peut simplement prendre $\phi(X) = \dfrac{\alpha - \mathbb{P}_{\theta_0}[T(X) < c']}{\mathbb{P}_{\theta_0}[T(X) = c']}$ lorsque $T(X) = c'$.

<u>Rem</u> Si ψ est décroissante, on change T en $-T$ ie on change le sens des inégalités.

Exemple 1 $X_1, \dots, X_n$ iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on veut tester $H_0 : \mu = \mu_0 \mid H_1 : \mu = \mu_1$ avec σ^2 connu. On commence par calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{f_{\theta_0}(X_i)}{f_{\theta_1}(X_i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(X_i-\mu_0)^2 - (X_i-\mu_1)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)(\mu_0-\mu_1) + \text{cste}(\sigma^2, \mu_0, \mu_1)$$

C'est une fonction strictement croissante de $(\mu_0-\mu_1)\sum_{i=1}^{n} X_i$ ou de manière équivalente $(\mu_0-\mu_1)\overline{X}_n$. Donc on choisit des tests de région de rejet 1) $\overline{X}_n < c$ si $\mu_0 > \mu_1$ 2) $\overline{X}_n > c$ si $\mu_0 < \mu_1$ et on remarque que $\mathbb{P}_\mu(\overline{X}_n = c) = 0$. Supposons 1). On a alors que sous H_0 $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}_n - \mu_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc

$$\mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n-\mu_0) \leq \Phi^{-1}(\alpha)\right] = \alpha$$ donc on peut choisir

le test $\phi(X) = \mathbb{1}_{\overline{X}_n < c}$ avec $c = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\alpha)$.

On peut calculer la puissance de ce test :

$$\beta = \mathbb{P}_{\theta_1}[\overline{X}_n < c] = \mathbb{P}_{\theta_1}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \theta_1) < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(c-\mu_1)\right]$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu_1) + \Phi^{-1}(\alpha)\right).$$

Remarque : $\beta \uparrow$ avec $n \uparrow$, $\beta \uparrow$ quand $\mu_0 - \mu_1 \gg 1$ et $\beta \to 1$ avec $n \to +\infty$.

Neyman Pearson $\Rightarrow$ pas de test plus puissant !.

Revenons maintenant au problème des hypothèses composites (pas simples).

On ne sait pas en général optimiser la puissance $\beta(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta_1$ simultanément, sauf dans des cas très particuliers.

Déf Pour tester $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$ un test $\phi(X)$ de fonction puissance $\beta(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\phi(X)]$ est dit <u>uniformément plus puissant</u> (UPP) de niveau α si $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$ et si tout autre test ϕ' de niveau également α vérifie $\mathbb{E}_\theta \phi'(X) \leq \beta(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$.

Donc si ϕ est UPP il est <u>optimal</u> car il maximise la puissance $\beta(\theta)$.

Déf Soit $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ modèle statistique dominé et $L(\theta; X)$ la vraisemblance du modèle. Si il existe une statistique $T(X)$ telle que $\forall \theta < \theta' \in \Theta$

$$\frac{L(\theta'; X)}{L(\theta; X)} = \psi_{\theta,\theta'}(T(X))$$ est une fonction <u>croissante</u> de $T(X)$

alors on dit que on dit qu'il s'agit d'un modèle à <u>rapport de vraisemblance croissant</u> par rapport à T. Si $\psi_{\theta,\theta'}$ décroissante " " décroissant.
L'un ou l'autre = <u>rapport de vraisemblance monotone</u>

Etudions le cas <u>croissant</u> uniquement (quitte à remplacer T par $-T$)

Dans ce cas, pour tester θ contre $\theta' > \theta$ on doit avoir que des tests de forme

$$\phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } T(X) < c \\ 1 & \text{si } T(X) > c \end{cases} \qquad (*)$$

sont les plus puissants au niveau $\alpha = \mathbb{E}_\theta[\phi(X)]$ d'après ce que l'on a vu juste avant.

Thm Soit $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ un modèle dominé à rapports de vraisemblance croissant par rapport à $T(X)$. Pour tester $H_0 : \{\theta \leq \theta_0\}$ contre $H_1 : \{\theta > \theta_0\}$ un test de la forme $(*)$ et tel que $\mathbb{E}_{\theta_0} \phi(X) = \alpha$ est UPP de niveau α pour H_0 contre H_1. De plus $\beta(\theta) = \mathbb{E}_\theta \phi(X)$ est croissante sur Θ

Dém. Soit $\phi(X)$ donné par $(*)$. Il est de niveau α pour $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$, et il a la puissance maximale pour chaque $\theta > \theta_0$. Il est donc UPP pour $H_0, \theta = \theta_0$. Si β est croissante, alors il est aussi de niveau α pour $H_0 : \theta \leq \theta_0$ car alors $\sup_{\theta \leq \theta_0} \beta(\theta) = \beta(\theta_0) = \alpha$.
Pour montrer que β est croissante, il suffit de regarder ϕ comme un test de θ contre $\theta' > \theta$. Vu sa forme, il est UPP et de niveau $\beta(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\phi(X)]$ et de puissance $\beta(\theta') = \mathbb{E}_{\theta'}[\phi(X)]$. Mais on avait vu qu'une conséquence du Lemme de Neyman-Pearson est que le niveau est toujours $\leq$ puissance pour ce type de test $\square$

Corollaire Soit $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ modèle dominé. Alors les tests et problèmes de tests suivants sont UPP de niveau $\alpha = \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)]$

Rapport de vraisemblance	Forme du test	Hypothèses
croissant par rapport à T	$\phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } T(X) > c \\ 1 & \text{si } T(X) < c \end{cases}$	$H_0 : \{\theta \geq \theta_0\}$ | $H_1 : \{\theta < \theta_0\}$ et β décroissante
décroissant par rapport à T	$\phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } T(X) > c \\ 1 & \text{si } T(X) < c \end{cases}$	$H_0 : \{\theta \leq \theta_0\}$ | $H_1 : \{\theta > \theta_0\}$

décroissant par rapport à T	$\phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } T(X) < c \\ 1 & \text{si } T(X) > c \end{cases}$	$H_0 : \{\theta \geq \theta_0\}$ $H_1 : \{\theta < \theta_0\}$

Sans oublier que pour régler le niveau, il faut choisir c et éventuellement ϕ sur $\{T(X) = c\}$.

Exemple

Si $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ est un modèle exponentiel général.

$f_\theta(x) = C(\theta) \exp\big(Q(\theta) T(x)\big) h(x)$ alors le rapport de vraisemblance pour $\theta' > \theta$ s'écrit

$$\frac{f_{\theta'}(X)}{f_\theta(X)} = \frac{C(\theta')}{C(\theta)} \exp\Big(\big(Q(\theta') - Q(\theta)\big) T(X)\Big)$$

qui est strictement monotone de $T(X)$ (puisque $Q(\theta) \neq Q(\theta')$) et monotone dans le m̂ sens que Q.

Donc beaucoup d'exemples ! Par exemple pour Poisson :

$X_1, \dots, X_n$ iid $\mathcal{P}(\lambda)$ pour tester $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda > \lambda_0$ on rejette si $\overline{X}_n > c$ et on pose $\phi = p$ si $\overline{X}_n = c$. On ajuste le niveau α en choisissant $c = \frac{k}{n}$ ou k entier et $p \in [0,1]$ de sorte que $\alpha = \mathbb{P}_{\lambda_0}\left[\overline{X}_n > \frac{k}{n}\right] + p\, \mathbb{P}_{\lambda_0}\left[\overline{X}_n = \frac{k}{n}\right]$

Pour les modèles d'échantillonnage avec n observations iid dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone les tests U.P.P de niveau α ont des puissances qui tendent vers 1 $\forall \theta \in \Theta_1$

Thm Soit $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ modèle $P_\theta = f_\theta \cdot \mu$ et modèle de n-échantillonnage $\{P_\theta^{\otimes n} : \theta \in \Theta\}$ à rapport de vraisemblance monotone pour tout $n \geq 1$. Pour tester $\{\theta \leq \theta_0\}$ contre $\{\theta > \theta_0\}$ (ou le contraire) toute suite de tests UPP $\phi_n(X_1, .., X_n)$ de niveaux α_n t.q. $\liminf \alpha_n > 0$ vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} E_\theta \phi_n(X_1, X_2, .., X_n) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta_1.$$

dém On suppose $\Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ (autre cas se traite de la m̂ façon)
on fixe $\theta \in \Theta_1$ et on considère le test de rapport de vraisemblance de θ_0 contre θ qui rejette θ_0 si

$$\sum_{i=1}^n \log f_\theta(X_i) \geq \sum_{i=1}^n \log f_{\theta_0}(X_i)$$

Pour cela on a besoin d'introduire l'affinité de Hellinger $\rho(P, Q)$ entre deux mesures $P, Q \ll \mu$

Déf Etant donné deux lois de proba P et Q et une mesure dominante μ on appelle affinité de Hellinger $\rho(P, Q)$ entre P et Q la quantité

$$\rho(P, Q) = \int \sqrt{\frac{dP}{d\mu}(x) \frac{dQ}{d\mu}(x)} \, \mu(dx) \geq 0$$

qui est une quantité indépendante de μ

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

(*) $\quad 0 \leq \rho(P, Q) \leq 1 \quad$ (Cauchy Schwarz)
et $\rho(P, Q) < 1$ si $P \neq Q$

$$(*) \qquad \rho(P^{\otimes n}, Q^{\otimes n}) = \rho^n(P, Q).$$

On en déduit alors que si $X \sim P$

$$\mathbb{P}\left[\log\left(\frac{dQ}{d\mu}(X)\right) \geq \log\left(\frac{dP}{d\mu}(X)\right)\right]$$

$$= \mathbb{P}[Z \geq 0] \leq \mathbb{E}\left[e^{Z/2}\right] \qquad \text{avec } Z = \log\frac{dQ}{d\mu}(X) - \log\frac{dP}{d\mu}(X)$$

$$= \rho(P, Q)$$

car en effet $\mathbb{E}[e^{Z/2}] = \mathbb{E}_{X\sim P}\left[\sqrt{\frac{dQ}{d\mu}(X)} \Big/ \sqrt{\frac{dP}{d\mu}(X)}\right]$

$$= \int \sqrt{\frac{dQ}{d\mu}(x)} \sqrt{\frac{dP}{d\mu}(x)}\, \mu(dx) = \rho(P, Q)$$

on a donc pour la région de rejet $R = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \log f_\theta(X_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \log f_{\theta_0}(X_i) \right\}$

$\mathbb{P}_{\theta_0}[R] \leq \rho^n(P_\theta, P_{\theta_0})$ et $\mathbb{P}_\theta[R^c] \leq \rho^n(P_{\theta_0}, P_\theta) = \rho^n(P_\theta, P_{\theta_0})$

et donc les deux erreurs $\to 0$ car $\rho(P_\theta, P_{\theta_0}) < 1$, donc

pour n assez grand $\mathbb{P}_{\theta_0}[R] \leq \alpha_n \Rightarrow$ ce test est de niveau α_n donc

sa puissance β_n en θ ne dépasse pas celle de ϕ_n qui est UPP, ie

$\mathbb{E}_\theta \phi_n \geq \beta_n \geq 1 - \rho^n(P_\theta, P_{\theta_0})$ ce qui montre $\mathbb{E}_\theta \phi_n \to 1 \quad \forall \theta \in \Theta_1$