CORRECTION DU PARTIEL

Exercice 1 (Inégalité de Bennett)

1. Soit $\phi : x \mapsto e^x - x - 1$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x^2}$, prolongée par continuité en 0, est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \geq 0$. Par la question précédente, et comme $X_i \leq 1$, on a $\frac{\phi(\lambda X_i)}{\lambda^2 X_i^2} \leq \frac{\phi(\lambda}{)}\lambda^2$. Ainsi

$$e^{\lambda X_i} = 1 + \lambda X_i + \phi(\lambda X_i) \leq 1 + \lambda X_i + \mathcal{X}_i^2 \phi(\lambda)\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda Z - \mathbb{E}[Z]}\right] &= \sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_i - \mathbb{E}[X_i]}\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left\{\ln\left(1 + \lambda \mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[X_i^2]\phi(\lambda)\right) - \lambda \mathbb{E}[X_i]\right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2]\phi(\lambda)\,,
\end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité, on a utilisé $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$.

3. On utilise la méthode de Chernoff. Soit $t \geq 0$ et $\lambda > 0$. Par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}\left(Z - \mathbb{E}Z \geq t\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda(Z - \mathbb{E}Z)} \geq e^{\lambda t}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z - \mathbb{E}[Z]}\right]}{e^{\lambda t}} = e^{-\{\lambda t - v\phi(\lambda)\}}\,.$$

En prenant le supremum en $\lambda > 0$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(Z - \mathbb{E}Z \geq t\right) \leq e^{-\sup_{\lambda > 0}\{\lambda t - v\phi(\lambda)\}}\,.$$

La fonction $\lambda \mapsto \lambda t - v\phi(\lambda)$ est maximale en $\lambda_\star = \ln\left(1 + \frac{t}{v}\right)$, et

$$\lambda_\star t - v\phi(\lambda_\star) = (t+v)\ln\left(1 + \frac{t}{v}\right) - t = vh\left(\frac{t}{v}\right)\,.$$

Exercice 2 (Loi de Pareto)

Soit $\theta > 0$, et X une variable aléatoire de densité f_θ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = \frac{2\theta^2}{x^3}\mathbb{1}_{x \geq \theta}.$$

On considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

1. On a

$$\mathbb{E}[X] = 2\theta^2 \int_\theta^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2\theta\,.$$

On peut donc proposer l'estimateur $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i$, qui est consistant par la loi des grands nombres. Cependant, le TCL ne s'applique pas car

$$\mathbb{E}[X^2] = 2\theta^2 \int_\theta^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty\,.$$

2. On a
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = 2\theta^2 \int_\theta^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx = \frac{2}{3\theta}\,,$$
ce qui conduit à considérer l'estimateur
$$\widehat{\theta}_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}\right)^{-1}\,.$$
Par la loi forte des grands nombres, on a
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{2}{3\theta}\,,$$
et comme la fonction $g : x \longmapsto \frac{2}{3x}$ est continue en $2/3\theta \neq 0$, on a par le théorème de continuité $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \theta$. De plus, on a $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{X}\right) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X^2}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]^2 = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{4}{9\theta^2} = \frac{1}{18\theta^2}$. Le TLC nous donne donc
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} - \frac{2}{3\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{18\theta^2}\right)\,.$$
Pour tout $x \neq 0$, on a $g'(x) = \frac{-2}{3x^2}$ et donc g est dérivable en $\frac{2}{3\theta}$, et
$$g'\left(\frac{2}{3\theta}\right) = \frac{-3}{2}\theta^2.$$
On obtient donc, par la delta méthode,
$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{8}\right)\,.$$

3. (a) Pour tout $x < \theta$, on a $\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x) = 0$, et pour tout $x \geq \theta$,
$$\mathbb{P}\left(X_{(1)} \leq x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_{(1)} > x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X > x\right)^n = 1 - \frac{\theta^{2n}}{x^{2n}}\,.$$
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{P}\left(n(X_{(1)} - \theta) \leq x\right) = \mathbb{1}_{x\geq 0}\left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta + \frac{x}{n}}\right)^{2n}\right) = \mathbb{1}_{x\geq 0}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\theta n}\right)^{2n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-\frac{2x}{\theta}}\,.$$
   Ainsi
$$n\left(X_{(1)} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}\left(\frac{2}{\theta}\right)\,.$$
   (c) Cherchons un intervalle de la forme
$$I = \left[X_{(1)}c_\alpha\,,\, X_{(1)}\right]\,,$$
   avec $c_\alpha \in]0,1[$. On a
$$\mathbb{P}\left(X_{(1)}c_\alpha \geq \theta\right) = \alpha \Leftrightarrow c_\alpha^{2n} = \alpha \Leftrightarrow c_\alpha = \alpha^{1/2n}.$$
   On obtient donc l'intervalle $I = \left[X_{(1)}\alpha^{1/2n}\,,\, X_{(1)}\right]$.

(d) On cherche un test de la forme $T(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{X_{(1)} < c_\alpha \theta_0}$ avec $c_\alpha > 1$ (pour $c_\alpha = 1$, le test ne se trompe jamais sur H_0, i.e. la taille vaut 0). On a

$$\sup_{\theta \geq \theta_0} \mathbb{P}_\theta \left(X_{(1)} < c_\alpha \theta_0 \right) = \sup_{\theta \geq \theta_0} \left(1 - \left(\frac{\theta}{c_\alpha \theta_0} \right)^{2n} \right) = 1 - c_\alpha^{-2n} .$$

On prend donc $c_\alpha = (1-\alpha)^{-\frac{1}{2n}}$, et l'on obtient le test $T(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{X_{(1)} < (1-\alpha)^{-\frac{1}{2n}} \theta_0}$, qui est bien de taille α par construction

Exercice 3 (Régression linéaire polynomiale)

1. Posons $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$, $\boldsymbol{\beta}_r = (\beta_0, \ldots, \beta_r)^T \in \mathbb{R}^{r+1}$ et
$$\mathbf{X}_r = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^r \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,r+1}(\mathbb{R}) .$$
Alors on a bien $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_r \boldsymbol{\beta}_r + \varepsilon$.
La famille formée par les $r+1$ colonnes de $\mathbf{X}_r$ est libre ssi le seul vecteur $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ vérifiant
$$\forall i \in [\![1, n]\!] , \ \lambda_0 + \lambda_1 z_i + \cdots + \lambda_r z_i^r = 0$$
est le vecteur nul. S'il y a au moins $r+1$ valeurs distinctes parmi les $z_1, \ldots, z_n$, alors on obtient $r+1$ racines distinctes pour un polynôme de degré r : c'est le polynôme nul. Inversement, s'il y a moins de r valeurs distinctes, on peut trouver un polynôme non-nul de degré r dont ces valeurs sont racines. Ainsi $\mathbf{X}_r$ est de rang $r+1$ ssi il y a au moins $r+1$ valeurs distinctes parmi les $z_1, \ldots, z_n$. Pour que toutes les matrices $\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_{n-1}$ soient de rang plein, il faut et il suffit que tous les z_i soient distincts.
2. On a $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r = (\mathbf{X}_r^T \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^T \mathbf{Y}$. De plus, un estimateur sans biais de σ^2 est donné par $\widehat{\sigma}^2 = \frac{\|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r\|^2}{n-r-1}$.
Dans le modèle linéaire gaussien, on a $\widehat{\boldsymbol{\beta}_r} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_r, \sigma^2 (\mathbf{X}_r^T \mathbf{X}_r)^{-1})$ et $(n-r-1)\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-r-1}$. De plus, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendants.
3. Pour tester $H_0 : a_r = 0$ contre $H_1 : a_r \neq 0$, il est naturel de rejeter H_0 lorsque l'estimateur $\widehat{a}_r$ de a_r "est loin" de 0. Plus précisément, on rejette lorsque $|\widehat{a}_r| > c_\alpha$ où la constante c_α est à choisir de sorte que le test soit de niveau α. Par la question précédente, on a $\widehat{a}_r \sim \mathcal{N}(a_r, \sigma^2 v_r)$ avec $v_r = ((\mathbf{X}_r^T \mathbf{X}_r)^{-1})_{r+1,r+1}$ et donc $\frac{\widehat{a}_r - a_r}{\sigma \sqrt{v_r}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. De plus, par l'indépendance de $\widehat{a}_r$ et $\widehat{\sigma}^2$ on obtient
$$\frac{\frac{\widehat{a}_r - a_r}{\sigma\sqrt{v_r}}}{\sqrt{\frac{(n-r-1)\widehat{\sigma}^2}{(n-r-1)\sigma^2}}} = \frac{\widehat{a}_r - a_r}{\widehat{\sigma}\sqrt{v_r}} \sim \mathcal{T}(n-r-1).$$
Ainsi, si $t_{n-r-1}(1-\alpha/2)$ correspond au quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student $\mathcal{T}(n-r-1)$ (qui est symétrique), on a
$$\mathbb{P}_{a_r=0} \left(|\widehat{a}_r| > \widehat{\sigma}\sqrt{v_r} t_{n-r-1}(1-\alpha/2) \right) = \alpha .$$
On choisit donc $c_\alpha = \widehat{\sigma}\sqrt{v_r} t_{n-r-1}(1-\alpha/2)$ et on obtient qu'un test de niveau α est donné par la région de rejet
$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ |\widehat{a}_r| > \widehat{\sigma}\sqrt{v_r} t_{n-r-1}^{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} .$$

4. On peut utiliser la procédure de sélection ascendante ou descendante (pour les détails voir le poly).
5. Par définition de l'estimateur des moindres carrés de (M_r), nous avons $\widehat{\mathbf{Y}}_r = \mathbf{X}_r\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r = P_r\mathbf{Y}$. Or, sous $(M_\star)$, $\mathbf{Y} = H + \epsilon$, donc $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(H, \sigma^2 I_n)$. Ainsi, $\widehat{\mathbf{Y}}_r = P_r\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(P_rH, \sigma^2 P_rP_r^T)$. Concernant la matrice de covariance, nous avons $P_rP_r^T = P_r$ car P_r est une matrice de projection orthogonale. Par ailleurs, concernant l'espérance de $\widehat{\mathbf{Y}}_r$, par définition d'une projection orthogonale, il existe $\widehat{\beta} \in \mathbb{R}^n$ tel que $P_rH = \mathbf{X}_r\widehat{\beta}$ avec $\widehat{\beta} = \arg\min_{\beta\in\mathbb{R}^{r+1}} \|H - \mathbf{X}_r\beta\|^2$. Or pour tout $\beta \in \mathbb{R}^{r+1}$, on a $\mathbf{X}_r\beta = (q(z_1), \ldots, q(z_n))^T$, où q est le polynôme de $\mathcal{P}_r$ dont les coefficients sont donnés par β. Ainsi, si $\widehat{q}$ est le polynôme de $\mathcal{P}_r$ dont les coefficients sont donnés par $\widehat{\beta}$, on a
$$\widehat{q} = \arg\min_{q\in\mathcal{P}_r} \|H - (q(z_1), \ldots, q(z_n))^T\|^2 = \arg\min_{q\in\mathcal{P}_r} \sum_{i=1}^n (h(z_i) - q(z_i))^2 = p_r\,.$$
Ainsi, $P_rH = \mathbf{X}_r\widehat{\beta} = (p_r(z_1), \ldots, p_r(z_n))^T$.
6. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|\widehat{\mathbf{Y}}_r - H\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\|\widehat{\mathbf{Y}}_r - \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r]\|^2\right] + \mathbb{E}\left[\|\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r] - H\|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\langle \widehat{\mathbf{Y}}_r - \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r]\,,\, \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r] - H\rangle\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\|\widehat{\mathbf{Y}}_r - \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r]\|^2\right] + \|\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r] - H\|^2\,,\end{aligned}$$
car $\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r] - H$ est constant, et $\mathbb{E}\left[\langle \widehat{\mathbf{Y}}_r - \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r]\,,\, \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r] - H\rangle\right] = \langle 0, \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r] - H\rangle = 0$. De plus,
$$\mathbb{E}\left[\|\widehat{\mathbf{Y}}_r - \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r]\|^2\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{r,i} - \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_{r,i}]\right)^2\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{r,i}\right) = \mathsf{trace}(\mathbf{V}_r)\,.$$
7. Pour le biais on a, par la question 5. et par la définition de p_r,
$$\begin{aligned}\mathbf{b}_r^2 &= \|\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_r] - H\|^2\\ &= \|(p_r(z_1), \ldots, p_r(z_n))^T - H\|^2\\ &= \min_{q\in\mathcal{P}_r} \sum_{i=1}^n (q(z_i) - h(z_i))^2\\ &\le \min_{q\in\mathcal{P}_{r-1}} \sum_{i=1}^n (q(z_i) - h(z_i))^2 \qquad \text{car } \mathcal{P}_{r-1} \subset \mathcal{P}_r\\ &= \|(p_{r-1}(z_1), \ldots, p_{r-1}(z_n))^T - H\|^2\\ &= \|\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{Y}}_{r-1}] - \mathbf{H}\|^2 \;=\; \mathbf{b}_{r-1}^2\end{aligned}$$
Pour la variance, on a
$$\mathbf{V}_r - \mathbf{V}_{r-1} = \sigma^2(P_r - P_{r-1}).$$
Or $P_rP_{r-1} = P_{r-1}P_r = P_{r-1}$, donc $P_r - P_{r-1} = (I - P_{r-1})P_r$ est la matrice de projection orthogonale sur le supplémentaire de l'image de $\mathbf{X}_{r-1}$ dans l'image de $\mathbf{X}_r$: elle est symétrique car P_r et P_{r-1} le sont, et
$$(P_r - P_{r-1})(P_r - P_{r-1}) = P_r - P_{r-1},$$
donc c'est bien une projection orthogonale. Par conséquent, $P_r - P_{r-1}$ est une matrice semi-définie positive. De plus, $\sigma^2 > 0$, donc $\mathbf{V}_r - \mathbf{V}_{r-1}$ est aussi une matrice semi-définie positive.
On observe qu'en ajoutant une variable le biais diminue alors que la variance augmente.

Exercice 4 (Test de Kolmogorov–Smirnov)

1. Si $G(x) \geq u$, alors par définition de $G^{-1}(u)$, on a $G^{-1}(u) \leq x$. Inversement, si $G^{-1}(u) \leq x$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $G^{-1}(u) < x + \varepsilon$. Donc, par définition de $G^{-1}(u)$, on a $G(x+\varepsilon) \geq u$. Comme G est continue à droite, on obtient $G(x) \geq u$.

   Soit $U \sim$ Unif$[0,1]$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par l'équivalence que l'on vient de montrer,

$$\mathbb{P}\left(G^{-1}(U) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U \leq G(x)\right) = G(x)\,.$$

   Ainsi, $G^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition G.

2. Par la question précédente et l'indépendance des X_i, le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ a même loi que $(F^{-1}(U_1), \ldots, F^{-1}(U_n))$. Donc, sous H_0, D_n a même loi que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{F_0^{-1}(U_i) \leq x\}} - F_0(x) \right|.$$

   En utilisant l'équivalence $F(x) \geq u \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(u)$ puis le fait que F_0 est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{F_0^{-1}(U_i) \leq x\}} - F_0(x) \right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq F_0(x)\}} - F_0(x) \right| \\
&= \sup_{u\in[0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq u\}} - u \right| \\
&= \sup_{u\in[0,1]} \left| \widehat{G}_n(u) - u \right| \,.
\end{aligned}$$

3. Notons $s_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de la variable aléatoire K_n. D'après ce qui précède, un test de niveau α est donné par la région de rejet

$$\mathcal{R}_\alpha = \{D_n > s_{1-\alpha}\}.$$

Exercice 5 (Méthode de Box–Muller)

1. Notons f la densité du couple (X, Y) et

$$\begin{aligned}
\psi \ :\ ]0,\infty[\times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \\
(r,\zeta) &\mapsto (r\cos\zeta, r\sin\zeta)\,.
\end{aligned}$$

   La fonction ψ est un C^1-difféomorphisme, et le changement de variables $(x,y) = \psi(r,\zeta)$ donne, pour toute fonction $\phi :]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\phi(R,\theta)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\psi^{-1}(X,Y)\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_+\times\{0\})} \varphi(\psi^{-1}(x,y)) f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} \varphi(r,\zeta) f(\psi(r,\zeta)) \times |\det(J_\psi(r,\zeta))|\,drd\zeta\,,
\end{aligned}$$

   avec

$$\det(J_\psi(r,\zeta)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial r}(r,\eta) & \frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}(r,\eta) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial r}(r,\eta) & \frac{\partial\psi_2}{\partial\eta}(r,\eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\zeta & -r\sin\zeta \\ \sin\zeta & r\cos\zeta \end{vmatrix} = r.$$

Par conséquent, la densité du couple (R, θ) est donnée par :

$$g(r, \zeta) = rf(\psi(r, \zeta))\mathbb{1}_{[0,\infty[}(r)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\zeta) .$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $f(x, y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Donc

$$g(r, \zeta) = \frac{r}{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(r)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\zeta) .$$

Ainsi R et θ sont indépendantes, θ est de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, et R^2 suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. En effet, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(R^2 \leq t) = \mathbb{P}(R \leq \sqrt{t}) = 1 - e^{-t/2}.$$

2. Soit $U \sim$ Unif$[0, 1]$. Alors il est facile de voir que $2\pi U \sim$ Unif$[0, 2\pi]$. D'autre part, par la question 1. de l'exercice 4, on sait que si $V \sim$ Unif$[0, 1]$ et si G est la fonction de répartition de R, alors $G^{-1}(V)$ a la même loi que R. Ici, $G(r) = 1 - \mathrm{e}^{-r^2/2}$ pour $r > 0$. Ainsi, pour tout $u \in]0, 1[$, $G^{-1}(u) = \sqrt{-2\log(1-u)}$ et donc $\sqrt{-2\log(1-V)} \sim R$. On obtient que

$$\left(\sqrt{-2\log(1-V)}\cos(2\pi U) \, , \, \sqrt{-2\log(1-V)}\sin(2\pi U)\right) \sim (X, Y) .$$